

Exercice 1

Enoncé :

Soit l'univers $U = \{A, B, C, D\}$. Considérer la relation u sur U , définie par la table suivante.

A	B	C	D
a	b	c	d
a'	b	c'	d
a	b	c'	d
a'	b	c	d

Une dépendance fonctionnelle $X \rightarrow Y$ est dite **canonique** si Y ne contient qu'un seul attribut. Citer toutes les dépendances fonctionnelles (DFs) canoniques non-triviales que satisfait la relation u . Par rapport à ces DFs, u a-t-elle des redondances de données ?

Correction :

Les dépendances fonctionnelles (DFs) canoniques non-triviales (c'est-à-dire que $X \rightarrow Y$ tel que $Y \not\subset X$) que satisfait la relation u sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B, A \rightarrow D, B \rightarrow D, C \rightarrow B, C \rightarrow D, D \rightarrow B \\ AB \rightarrow D, AC \rightarrow B, AC \rightarrow D, AD \rightarrow B, CB \rightarrow D, CD \rightarrow B \\ ABC \rightarrow D, ADC \rightarrow B \end{array} \right\}$$

Par rapport à ces dépendances fonctionnelles (DFs) canoniques non-triviales que satisfait la relation u , il y a des redondances de données. Par exemple, les DFs $\{A \rightarrow B, A \rightarrow D, B \rightarrow D, C \rightarrow B, C \rightarrow D, D \rightarrow B\}$ sont suffisantes, car les autres DFs se déduisent de ces dernières.

Exercice 2

Enoncé :

Soit $U = \{A, B, C, D\}$, et supposons que $dom(A) = \{a, a'\}$, $dom(B) = \{b, b'\}$, $dom(C) = \{c, c'\}$ et $dom(D) = \{d\}$. Pour chaque ensemble F suivant, calculer les relations maximales (par rapport à l'inclusion) appartenant à $sat(F)$.

- (a) $F = \{AB \rightarrow CD\}$
- (b) $F = \{D \rightarrow BC\}$
- (c) $F = \{D \rightarrow BC, AB \rightarrow CD\}$
- (d) $F = \{CD \rightarrow AB, AB \rightarrow CD\}$

Correction :

Définition : $sat(F) = \{relation\ u \mid u\ \text{satisfait les dépendances de } F\}$

- (a) $F = \{AB \rightarrow CD\}$

$$AB \rightarrow CD$$

a	b	→	.	d
a	b'	→	.	d
a'	b	→	.	d
a'	b'	→	.	d

Donc :

A	B	C	D
a	b	.	d
a	b'	.	d
a'	b	.	d
a'	b'	.	d

(.) signifie que l'attribut peut prendre n'importe quelle valeur dans le domaine correspondant. Ici, (.) peut prendre la valeur c ou c' . Il y a donc 16 relations maximales possibles appartenant à $sat(F)$.

(b) $F = \{D \rightarrow BC\}$

$D \rightarrow BC$			
d	→	.	.

Donc :

A	B	C	D
a	x_B	x_C	d
a'	x_B	x_C	d

x_B de la colonne B peut prendre la valeur b ou b' et x_C de la colonne C peut prendre la valeur c ou c' . Pour les deux tuples de la table, les valeurs de x_B et x_C restent inchangées. Il y a donc 4 relations maximales possibles appartenant à $sat(F)$.

(c) $F = \{D \rightarrow BC, AB \rightarrow CD\}$

$D \rightarrow BC$			
d	→	.	.

$AB \rightarrow CD$			
a	b	→	.
a'	b	→	.
a	b'	→	.
a'	b'	→	.

Donc :

A	B	C	D
a	x_B	x_C	d
a'	x_B	x_C	d

x_B de la colonne B peut prendre la valeur b ou b' et x_C de la colonne C peut prendre la valeur c ou c' . Pour les deux tuples de la table, les valeurs de x_B et x_C restent inchangées. Il y a donc 4 relations maximales possibles appartenant à $sat(F)$.

(d) $F = \{CD \rightarrow AB, AB \rightarrow CD\}$

$CD \rightarrow AB$			
c	d	→	.
c'	d	→	.

$AB \rightarrow CD$			
a	b	→	.
a'	b	→	.
a	b'	→	.
a'	b'	→	.

Donc :

A	B	C	D
x_{A1}	x_{B1}	c	d
x_{A2}	x_{B2}	c'	d

x_{B1} et x_{B2} de la colonne B peut prendre la valeur b ou b' et x_{A1} et x_{A2} de la colonne A peut prendre la valeur a ou a' , sachant que (x_{A1}, x_{B1}) et (x_{A2}, x_{B2}) sont différents. Il y a donc 12 relations maximales possibles appartenant à $sat(F)$.

Exercice 3

Enoncé :

Prouver que :

(a) Si $F \subseteq G$ alors $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$.

(b) Si $F \models G$ alors $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$.

(c) $\text{sat}(F \cup G) = \text{sat}(F) \cap \text{sat}(G)$

Est-ce que $\text{sat}(F \cap G) = \text{sat}(F) \cup \text{sat}(G)$?

Rappel :

1. Soit F un ensemble de DF et u une relation satisfaisant les DF de F : $u \in \text{sat}(F) \Leftrightarrow u \models F$
2. Soit F un ensemble de DF et f une DF : $F \models f \Leftrightarrow (\forall u \in U, u \models F \Rightarrow u \models f)$
3. Soit F et G deux ensembles de DF : $F \models G \Leftrightarrow \forall g \in G, F \models g \Leftrightarrow \forall g \in G, u \in U, (u \models F \Rightarrow u \models g)$

Correction :

(a) Soit $F \subseteq G$. Montrons que $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$.

Soit une relation u qui satisfait les DF de G , c'est-à-dire $u \in \text{sat}(G)$. Montrons que $u \in \text{sat}(F)$.

On peut écrire :

$$G = \{X_1 \rightarrow Y_1, \dots, X_i \rightarrow Y_i, X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1}, \dots, X_n \rightarrow Y_n\}$$

$$F = \{X_1 \rightarrow Y_1, \dots, X_i \rightarrow Y_i\} \subseteq G$$

On a $u \in \text{sat}(G)$ donc u satisfait $X_k \rightarrow Y_k, k = 1 \dots n$ tel que $(X_k \rightarrow Y_k) \in G$.

Or $F \subseteq G$, donc u satisfait $X_k \rightarrow Y_k, k = 1 \dots i$ tel que $(X_k \rightarrow Y_k) \in F$.

Par conséquent, u satisfait les dépendances de F , c'est-à-dire $u \in \text{sat}(F)$.

Donc $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$.

Ainsi : Si $F \subseteq G$ alors $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$.

(b) Soit $F \models G$. Montrons que $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$.

Soit une relation u qui satisfait les DF de F , c'est-à-dire $u \in \text{sat}(F)$. Montrons que $u \in \text{sat}(G)$.

On a $u \in \text{sat}(F)$ donc $u \models F$.

Or $F \models G$, donc $\forall g \in G, u \models g$, donc $u \models G$.

Par conséquent, $u \in \text{sat}(G)$.

Donc $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$.

Ainsi : Si $F \models G$ alors $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$.

(c) Montrons que $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(F) \cap \text{sat}(G)$.

On a $F \subseteq F \cup G$ donc $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(F)$: grâce à la propriété (a).

On a $G \subseteq F \cup G$ donc $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(G)$: grâce à la propriété (a).

Donc, on a $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(F)$ et $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(G)$, d'où $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(F) \cap \text{sat}(G)$

Ainsi : $\text{sat}(F \cup G) \subseteq \text{sat}(F) \cap \text{sat}(G)$.

Montrons que $\text{sat}(F) \cap \text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F \cup G)$.

Soit $u \in (\text{sat}(F) \cap \text{sat}(G))$. Montrons que $u \in \text{sat}(F \cup G)$.

Donc on a $u \in \text{sat}(F)$ et $u \in \text{sat}(G)$.

Donc u satisfait $X \rightarrow Y$ tel que $(X \rightarrow Y) \in F$

et u satisfait $X' \rightarrow Y'$ tel que $(X' \rightarrow Y') \in G$.

Ainsi u satisfait $X \rightarrow Y$ tel que : $(X \rightarrow Y) \in F$ ou $(X \rightarrow Y) \in G$.

Donc u satisfait $X \rightarrow Y$ tel que : $(X \rightarrow Y) \in F \cup G$.

Par conséquent $u \in \text{sat}(F \cap G)$.

Ainsi : $\text{sat}(F) \cap \text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F \cup G)$.

Donc on en déduit que : $\text{sat}(F) \cap \text{sat}(G) = \text{sat}(F \cup G)$

Non, on n'a pas $\text{sat}(F) \cup \text{sat}(G) = \text{sat}(F \cap G)$, car si u satisfait F et ne satisfait pas G , alors u ne satisfait pas forcément $F \cap G$ puisqu'on a perdu de l'information en restreignant l'ensemble.

Exercice 4 : Preuve des propriétés de l'implication sémantique.

Enoncé :

Sur un univers U , considérer un ensemble F quelconque de dépendances fonctionnelles (DFs), et les schémas de relations X, Y, Z, W définis sur U . Prouver les propriétés suivantes :

- (a) $F \models X \rightarrow \emptyset$.
- (b) $\{X \rightarrow Y\} \models \{XZ \rightarrow YZ\}$ (augmentation).
- (c) $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow Z\}$ (transitivité).
- (d) $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow YZ\}$ (addition).
- (e) $\{X \rightarrow YZ\} \models \{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$ (décomposition).
- (f) $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models \{XZ \rightarrow W\}$ (pseudo-transitivité).

Correction :

Définition d'un ensemble F de dépendances fonctionnelles : u satisfait $X \rightarrow Y$ tel que $(X \rightarrow Y) \in F$ si et seulement si pour tous n -uplets t_1 et t_2 de u , on a $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$.

Tout d'abord, on a : $X, Y, Z, W \subseteq U$.

- (a) Soit un ensemble F de dépendances fonctionnelles.

Soit u tel que $u \in \text{sat}(F)$.

Soit deux n -uplets t_1 et t_2 de u , tels que $t_1[X] = t_2[X]$.

Alors $t_1[\emptyset] = \emptyset = t_2[\emptyset]$ est toujours vraie.

Donc $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[\emptyset] = t_2[\emptyset]$.

D'où $X \rightarrow \emptyset$.

Par conséquent : $F \models X \rightarrow \emptyset$.

- (b) Soit u une relation qui satisfait $X \rightarrow Y$ tel que $(X \rightarrow Y) \in F$.

Soit deux n -uplets t_1 et t_2 de u , tels que $t_1[XZ] = t_2[XZ]$.

On a $t_1[XZ] = t_2[XZ]$ donc $t_1[X] = t_2[X]$ et $t_1[Z] = t_2[Z]$.

Or u une relation qui satisfait $X \rightarrow Y$ donc $t_1[Y] = t_2[Y]$.

On a $t_1[Y] = t_2[Y]$ et $t_1[Z] = t_2[Z]$ donc $t_1[YZ] = t_2[YZ]$.

Donc $t_1[XZ] = t_2[XZ] \Rightarrow t_1[YZ] = t_2[YZ]$.

D'où u une relation qui satisfait $XZ \rightarrow YZ$ tel que $(XZ \rightarrow YZ) \in F$.

Par conséquent : $\{X \rightarrow Y\} \models \{XZ \rightarrow YZ\}$.

(c) Soit u une relation qui satisfait $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow Z$ tel que $(X \rightarrow Y) \in F$ et $(Y \rightarrow Z) \in F$.

Soit deux n -uplets t_1 et t_2 de u , tels que $t_1[X] = t_2[X]$.

On a $t_1[X] = t_2[X]$ et u une relation qui satisfait $X \rightarrow Y$ donc $t_1[Y] = t_2[Y]$.

On a $t_1[Y] = t_2[Y]$ et u une relation qui satisfait $Y \rightarrow Z$ donc $t_1[Z] = t_2[Z]$.

Donc $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z]$.

D'où u une relation qui satisfait $X \rightarrow Z$ tel que $(X \rightarrow Z) \in F$.

Par conséquent : $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow Z\}$.

(d) $\{X \rightarrow Y\} \models \{X \rightarrow YX\}$ donc on en déduit : $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow YX, X \rightarrow Z\}$.

$\{X \rightarrow Z\} \models \{YX \rightarrow YZ\}$ donc on en déduit : $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow YX, YX \rightarrow YZ\}$.

$\{X \rightarrow YX, YX \rightarrow YZ\} \models \{X \rightarrow YZ\}$ donc on en déduit : $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow YZ\}$.

Par conséquent : $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow YZ\}$.

(e) Soit u une relation qui satisfait $X \rightarrow YZ$ tel que $(X \rightarrow YZ) \in F$.

Soit deux n -uplets t_1 et t_2 de u , tels que $t_1[X] = t_2[X]$.

On a $t_1[X] = t_2[X]$ et u une relation qui satisfait $X \rightarrow YZ$ donc $t_1[YZ] = t_2[YZ]$.

On en déduit que : $t_1[Y] = t_2[Y]$ et $t_1[Z] = t_2[Z]$.

Donc $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$ et $t_1[Z] = t_2[Z]$.

D'où u une relation qui satisfait $X \rightarrow Y$ et $X \rightarrow Z$ tel que $(X \rightarrow Y) \in F$ et $(X \rightarrow Z) \in F$.

Par conséquent : $\{X \rightarrow YZ\} \models \{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$.

(f) $\{X \rightarrow Y\} \models \{XZ \rightarrow YZ\}$ donc on en déduit : $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models \{XZ \rightarrow YZ, YZ \rightarrow W\}$.

$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models \{X \rightarrow Z\}$ donc on en déduit : $\{XZ \rightarrow YZ, YZ \rightarrow W\} \models \{XZ \rightarrow W\}$.

Par conséquent, $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models \{XZ \rightarrow W\}$.

Exercice 5 :

Enoncé :

Soit $F = \{C \rightarrow A, D \rightarrow B, AB \rightarrow CD\}$ et $G = \{CD \rightarrow B, AB \rightarrow C, AB \rightarrow D\}$. Est-ce que $\text{sat}(F) = \text{sat}(G)$?

Correction :

Pour montrer que l'égalité est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Proposons une relation u qui satisfait les dépendances fonctionnelles de G , définie par la table suivante :

A	B	C	D
a	b	c	d
a'	b	c'	d
a	b'	c	d'
a'	b'	c	d'

Ainsi, les relations de G sont vérifiées :

$CD \rightarrow B$			$AB \rightarrow C$			$AB \rightarrow D$		
c	d	$\rightarrow b$	a	b	$\rightarrow c$	a	b	$\rightarrow d$
c'	d	$\rightarrow b$	a'	b	$\rightarrow c'$	a'	b	$\rightarrow d$
c	d'	$\rightarrow b'$	a	b'	$\rightarrow c$	a	b'	$\rightarrow d'$
			a'	b'	$\rightarrow c$	a'	b'	$\rightarrow d'$

Est-ce que cette table vérifie les dépendances fonctionnelles de F ?

$C \rightarrow A$		$D \rightarrow B$		$AB \rightarrow CD$			
c	$\rightarrow \dots$	d	$\rightarrow b$	a	b	$\rightarrow c$	d
c'	$\rightarrow a'$	d'	$\rightarrow b'$	a'	b	$\rightarrow c'$	d
				a	b'	$\rightarrow c$	d'
				a'	b'	$\rightarrow c$	d'

Le problème vient du fait que la dépendance fonctionnelle $C \rightarrow A$ ne vérifie par la relation u . Par conséquent, l'égalité $\text{sat}(F) = \text{sat}(G)$ est fausse.

Exercice 6 :

Enoncé :

Soit : $F = \{A \rightarrow B, AC \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$, $G = \{A \rightarrow B, A \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$, $H = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, A \rightarrow E\}$. Quelle est la relation ensembliste entre $\text{sat}(F)$ et $\text{sat}(G)$? Entre $\text{sat}(F)$ et $\text{sat}(H)$?

Correction :

(a) Relation ensembliste entre $\text{sat}(F)$ et $\text{sat}(G)$:

Montrons que $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$:

$F = \{A \rightarrow B, AC \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$ alors :

$F \models A \rightarrow B$ et $AB \rightarrow CE$	car $A \rightarrow B$ et $AB \rightarrow CE$	(par définition)
$F \models A \rightarrow CE$	car $A \rightarrow B$ et $AB \rightarrow CE$	(pseudo-transitivité)
$F \models A \rightarrow C$ et $A \rightarrow E$	car $A \rightarrow CE$	(décomposition)
$F \models A \rightarrow D$	car $A \rightarrow C$ et $AC \rightarrow D$	(pseudo-transitivité)

Donc $F \models G$, donc $\text{sat}(F) \subseteq \text{sat}(G)$

Montrons que $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$:

$G = \{A \rightarrow B, A \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$ alors :

$G \models A \rightarrow B$ et $AB \rightarrow CE$	car $A \rightarrow B$ et $AB \rightarrow CE$	(par définition)
$G \models AC \rightarrow DC$	car $A \rightarrow D$	(augmentation)
$G \models AC \rightarrow D$ et $AC \rightarrow C$	car $AC \rightarrow DC$	(décomposition)

Donc $G \models F$, donc $\text{sat}(G) \subseteq \text{sat}(F)$

Conclusion : $\text{sat}(F) = \text{sat}(G)$

(b) Relation ensembliste entre $\text{sat}(F)$ et $\text{sat}(H)$:

Montrons que $\text{sat}(H) \subseteq \text{sat}(F)$:

$H = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, A \rightarrow E\}$ alors :

$H \models A \rightarrow B$	car $A \rightarrow B$	(par définition)
$H \models A \rightarrow D$	car $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow D$	(transitivité)
$H \models CD \rightarrow D$	car $C \rightarrow D$	(augmentation)
$H \models AC \rightarrow D$	car $A \rightarrow D$ et $CD \rightarrow D$	(pseudo-transitivité)
$H \models AB \rightarrow BE$	car $A \rightarrow E$	(augmentation)

$$\begin{array}{llll}
H \models AB \rightarrow E \text{ et } AB \rightarrow B & \text{car } AB \rightarrow BE & \text{(décomposition)} \\
H \models AB \rightarrow C & \text{car } A \rightarrow B, B \rightarrow C & \text{(pseudo-transitivité)} \\
H \models \boxed{AB \rightarrow CE} & \text{car } AB \rightarrow C \text{ et } AB \rightarrow E & \text{(addition)} \\
\text{Donc } H \models F, \text{ donc } \text{sat}(H) \subseteq \text{sat}(F)
\end{array}$$

Contre-exemple – Proposons une relation u qui satisfait les dépendances fonctionnelles de F , définie par la table suivante :

A	B	C	D	E
a	b'	c	d	e'
a'	b'	c'	d'	e

Ainsi, les relations de F sont vérifiées :

$A \rightarrow B$		$AC \rightarrow D$		$AB \rightarrow CE$			
a	$\rightarrow$ b'	a	c $\rightarrow$ d	a	b' $\rightarrow$ c	e'	
a'	$\rightarrow$ b'	a'	c' $\rightarrow$ d'	a'	b' $\rightarrow$ c'	e	

Est-ce que cette table vérifie les dépendances fonctionnelles de H ?

$A \rightarrow B$		$B \rightarrow C$		$C \rightarrow D$		$A \rightarrow E$	
a	$\rightarrow$ b'	b' $\rightarrow$		c	$\rightarrow$ d	a	$\rightarrow$ e'
a'	$\rightarrow$ b'			c'	$\rightarrow$ d'	a'	$\rightarrow$ e

Le problème vient du fait que la dépendance fonctionnelle $B \rightarrow C$ ne vérifie par la relation u . Par conséquent, l'égalité $\text{sat}(F) \not\subseteq \text{sat}(H)$ est fausse.

Conclusion : $\text{sat}(H) \subseteq \text{sat}(F)$

Exercice 7 :

Enoncé :

Montrer que la fermeture d'un ensemble de DFs F peut être de taille exponentielle par rapport à la taille de F .

Correction :

Soit un ensemble F de dépendances fonctionnelles définies sur U_1 . Soit un attribut A tel que $A \notin U_1$. On note $U_2 = U_1 \cup A$, F_1^+ la fermeture de F sur U_1 et F_2^+ la fermeture de F sur U_2 . Alors, on a la relation suivante :

$$F_2^+ \subseteq F_1^+ \cup \{X \rightarrow Y \mid Y \subseteq U_2 \text{ et } A \subseteq X \subseteq U_2\} \cup \{X \rightarrow Y \mid A \subseteq Y \subseteq U_2 \text{ et } A \not\subseteq X \subseteq U_2\}$$

Ainsi, si U_1 possède n attributs, alors U_2 possède $n+1$ attributs, alors au maximum, on aura en plus : $2^{n+1} \cdot 2^n + 2^n \cdot 2^n = 3 \times 2^{2n}$ nouvelles dépendances fonctionnelles dans la fermeture F_2^+ .

Ainsi, la taille maximale que peut obtenir la fermeture F^+ sur un univers U défini par N attributs est la suivante :

$$T_{MAX} = 1 + \sum_{i=0}^{N-1} [3 \times 2^{2i}] = 1 + 3 \sum_{i=0}^{N-1} 2^{2i} = 1 + 3 \sum_{i=0}^{N-1} 2^{2i} = 1 + 3 \sum_{i=0}^{N-1} 4^i = 1 + 3 \times \frac{1-4^N}{1-4} = 4^N$$

D'où la taille maximale est : $T_{MAX} = 4^N$, qui est bien de forme exponentielle.

Exercice 8 :

Enoncé :

Soit $U = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $G = \{A \rightarrow B, A \rightarrow AC, CB \rightarrow AE, BD \rightarrow AC\}$. Calculer les fermetures de A , AC , AD , BF et BDF par rapport à G .

Correction :

Fermeture de A par rapport à G :

- $A \in A^+$ et $(A \rightarrow B) \in G$ donc $B \in A^+$
- $A \in A^+$ et $(A \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in A^+$ et $A \in A^+$
- $C \in A^+$ et $B \in A^+$ et $(CB \rightarrow AE) \in G$ donc $E \in A^+$ et $A \in A^+$
- $D \notin A^+$ et $(BD \rightarrow AC) \in G$ donc rien.

→ La fermeture de A par rapport à G est $A^+ = \{A, B, C, E\}$

Fermeture de AC par rapport à G :

- $A \in AC^+$ et $(A \rightarrow B) \in G$ donc $B \in AC^+$
- $A \in AC^+$ et $(A \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in AC^+$ et $A \in AC^+$
- $C \in AC^+$ et $B \in AC^+$ et $(CB \rightarrow AE) \in G$ donc $E \in AC^+$ et $A \in AC^+$
- $D \notin AC^+$ et $(BD \rightarrow AC) \in G$ donc rien.

→ La fermeture de AC par rapport à G est $AC^+ = \{A, C, B, E\}$

Fermeture de AD par rapport à G :

- $A \in AD^+$ et $(A \rightarrow B) \in G$ donc $B \in AD^+$
- $A \in AD^+$ et $(A \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in AD^+$ et $A \in AD^+$
- $C \in AD^+$ et $B \in AD^+$ et $(CB \rightarrow AE) \in G$ donc $E \in AD^+$ et $A \in AD^+$
- $D \in AD^+$ et $B \in AD^+$ et $(BD \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in AD^+$ et $A \in AD^+$

→ La fermeture de AD par rapport à G est $AD^+ = \{A, D, B, C, E\}$

Fermeture de BF par rapport à G :

- $A \notin BF^+$ et $(A \rightarrow B) \in G$ donc rien.
- $A \notin BF^+$ et $(A \rightarrow AC) \in G$ donc rien.
- $C \notin BF^+$ et $(CB \rightarrow AE) \in G$ donc rien.
- $D \notin BF^+$ et $(BD \rightarrow AC) \in G$ donc rien.

→ La fermeture de BF par rapport à G est $BF^+ = \{B, F\}$

Fermeture de BDF par rapport à G :

- $D \in BDF^+$ et $B \in BDF^+$ et $(BD \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in BDF^+$ et $A \in BDF^+$
- $A \in BDF^+$ et $(A \rightarrow B) \in G$ donc $B \in BDF^+$
- $A \in BDF^+$ et $(A \rightarrow AC) \in G$ donc $C \in BDF^+$ et $A \in BDF^+$
- $C \in BDF^+$ et $B \in BDF^+$ et $(CB \rightarrow AE) \in G$ donc $E \in BDF^+$

→ La fermeture de BF par rapport à G est $BDF^+ = \{B, D, F, A, C, E\}$

Exercice 9 :

Enoncé :

Le système d'Armstrong est un système de dérivation syntaxique avec un axiome et deux règles de dérivations :

- Axiome : $\vdash X \rightarrow Y, \forall Y \subseteq X$
- Règle d'augmentation : $\{X \rightarrow Y\} \vdash XZ \rightarrow YZ$
- Règle de transitivité : $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \vdash X \rightarrow Z$

Prouver que la dérivation d'après le système d'Armstrong est correcte et complète, vis-à-vis de déductions sémantiques, c'est-à-dire : $F \vdash X \rightarrow Y \Leftrightarrow F \models X \rightarrow Y$.

Correction.

Tout d'abord redéfinissons l'implication sémantique :

Soit F un ensemble de DFs définies sur un univers U , et f une DF sur U . On dit que F implique sémantiquement f , notée $F \models f$, si et seulement si, pour tout relation u de U , $u \models F$ implique $u \models f$; soit :

$$\forall u \text{ une relation définie sur } U, u \models F \Rightarrow u \models f$$

Définition de la fermeture :

- Soit F un ensemble de DFs. La fermeture de F , notée F^+ , est définie par :

$$F^+ = \{f \mid F \vdash f\}$$

- Soit un univers U , et $X \subseteq U$. La fermeture de X par rapport à F , notée X_F^+ ou X^+ , est un ensemble maximal (par rapport à l'inclusion) $Y \subseteq U$ tel que $F \vdash X \rightarrow Y$ ($X \rightarrow Y \in F^+$).

Propriété :

$$F \vdash X \rightarrow Y \Leftrightarrow Y \subseteq X^+$$

A l'aide de ces deux définitions, tentons de montrer l'équivalence entre l'implication sémantique et l'implication syntaxique. Pour cela, nous allons montrer l'implication de la dérivation syntaxique vers la dérivation sémantique, puis l'implication inverse.

1. Supposons que $F \vdash X \rightarrow Y$. Montrons que $F \models X \rightarrow Y$.

Soit une relation u définie sur U telle que $u \models F$, montrons que $u \models f$.

$F \vdash X \rightarrow Y$ donc il existe une suite de DF $f_1, \dots, f_n$ telle que :

$$f_n = f \text{ et } \forall i \in [1; n], f_i \in F \text{ ou } \{f_1, \dots, f_{i-1}\} \vdash f_i \text{ en utilisant le système d'Armstrong.}$$

Par conséquent, pour tout $\forall i \in [1; n]$:

- soit $f_i \in F$: puisque $u \models F$, alors $u \models f_i$;
- soit $\{f_1, \dots, f_{i-1}\} \vdash f_i$: puisque $u \models \{f_1, \dots, f_{i-1}\}$, alors $u \models f_i$.

Ainsi, dans le cas particulier où $i = n$, on a : $u \models f_n$ et $f_n = f$ donc : $u \models f$.

Ainsi $F \models X \rightarrow Y$.

On a montré que : $F \vdash X \rightarrow Y \Rightarrow F \models X \rightarrow Y$.

2. On veut montrer que : $F \models X \rightarrow Y \Rightarrow F \vdash X \rightarrow Y$, ou plutôt $Y \subseteq X^+$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $Y \not\subseteq X^+$. Montrons que $F \not\models X \rightarrow Y$.

On a $Y \not\subseteq X^+$ et $X, Y \subseteq U$ donc $U - X^+ \not\subseteq Y$. Par conséquent, on peut avoir le tableau suivant :

u	X^+	$U - X^+$
t_1	x	w_1
t_2	x	w_2

On a, à partir du tableau, il existe u telle que $t_1[X^+] = t_2[X^+]$ et $\forall A \in U - X^+, t_1[A] \neq t_2[A]$, donc $u \not\models X \rightarrow Y$.

Montrons que $u \models F$. Soit $P \rightarrow Q \in F$.

- Cas où $P \subseteq X^+$: donc puisque $X \rightarrow X^+ \rightarrow P \rightarrow Q$, alors on a $Q \subseteq X^+$.

- Cas où $P \not\subseteq X^+$: on a $\forall A \in P, t_1[A] \neq t_2[A]$ (car $w_1 \neq w_2$).

Ainsi, $u \models P \rightarrow Q$ donc $u \models F$.

Par conséquent, on a : $u \models F$ et $u \not\models X \rightarrow Y$, donc $F \not\models X \rightarrow Y$.

On en conclut que : $F \models X \rightarrow Y \Rightarrow F \vdash X \rightarrow Y$.

Ainsi, nous avons finalement : $F \models X \rightarrow Y \Leftrightarrow F \vdash X \rightarrow Y$

Exercice 10 : Algorithme Ferme.

Enoncé :

Entrée : L'univers U , un schéma $X \subseteq U$, et un ensemble F de DFs.

Sortie : La fermeture X_F^+ .

```

Res := X;
répéter
    Unchange := true;
    pour chaque DF  $Y \rightarrow Z \in F$  faire
        si ( $Y \subseteq Res$  and  $Z \not\subseteq Res$ ) alors
            début
                Res := Res  $\cup$  Z;
                Unchange := false;
            fin
jusqu'à ce que ( $Res = U$  ou  $Unchange$ );
retourne Res.
```

1. Appliquer cet algorithme pour résoudre les exercices 5 et 6.
2. Prouver que l'algorithme **Ferme** est correct, c'est-à-dire que $Res = X_F^+$.

Correction :

1. Application de l'algorithme :

- a. Pour résoudre l'exercice 5 :

$F = \{C \rightarrow A, D \rightarrow B, AB \rightarrow CD\}$		$G = \{CD \rightarrow B, AB \rightarrow C, AB \rightarrow D\}$	
$A^+ = \{A\}$	$BD^+ = \{B, D\}$	$A^+ = \{A\}$	$BD^+ = \{B, D\}$
$B^+ = \{B\}$	$CD^+ = \{C, D, A, B\}$	$B^+ = \{B\}$	$CD^+ = \{C, D, B\}$
$C^+ = \{C, A\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D\}$	$C^+ = \{C\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D\}$
$D^+ = \{D, B\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C\}$	$D^+ = \{D\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C\}$
$AB^+ = \{A, B, C, D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B\}$	$AB^+ = \{A, B, C, D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B\}$
$AC^+ = \{A, C\}$	$BCD^+ = \{B, D, C, A\}$	$AC^+ = \{A, C\}$	$BCD^+ = \{B, D, C\}$
$AD^+ = \{A, D, B, C\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D\}$	$AD^+ = \{A, D\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D\}$
$BC^+ = \{B, C, A, D\}$		$BC^+ = \{B, C\}$	

On remarque que pour toutes les fermetures de G sont comprises dans celles de F , donc F et G ne sont pas équivalentes, et $sat(F) \subseteq sat(G)$.

b. Pour résoudre l'exercice 6 :

$F = \{A \rightarrow B, AC \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$		$G = \{A \rightarrow B, A \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$	
$A^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$A^+ = \{A, B, D, C, E\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D, E\}$
$B^+ = \{B\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C, E\}$	$B^+ = \{B\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C, E\}$
$C^+ = \{C\}$	$ABE^+ = \{A, B, E, C, D\}$	$C^+ = \{C\}$	$ABE^+ = \{A, B, E, D, C\}$
$D^+ = \{D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B, E\}$	$D^+ = \{D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B, E\}$
$E^+ = \{E\}$	$ACE^+ = \{A, C, E, B, D\}$	$E^+ = \{E\}$	$ACE^+ = \{A, C, E, B, D\}$
$AB^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$ADE^+ = \{A, D, E, B, C\}$	$AB^+ = \{A, B, D, C, E\}$	$ADE^+ = \{A, D, E, B, C\}$
$AC^+ = \{A, C, B, D, E\}$	$BCD^+ = \{B, C, D\}$	$AC^+ = \{A, C, B, D, E\}$	$BCD^+ = \{B, C, D\}$
$AD^+ = \{A, D, B, C, E\}$	$BCE^+ = \{B, C, E\}$	$AD^+ = \{A, D, B, C, E\}$	$BCE^+ = \{B, C, E\}$
$AE^+ = \{A, E, B, C, D\}$	$BDE^+ = \{B, D, E\}$	$AE^+ = \{A, E, B, D, C\}$	$BDE^+ = \{B, D, E\}$
$BC^+ = \{B, C\}$	$CDE^+ = \{C, D, E\}$	$BC^+ = \{B, C\}$	$CDE^+ = \{C, D, E\}$
$BD^+ = \{B, D\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$BD^+ = \{B, D\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D, E\}$
$BE^+ = \{B, E\}$	$ABCE^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$BE^+ = \{B, E\}$	$ABCE^+ = \{A, B, C, E, D\}$
$CD^+ = \{C, D\}$	$ABDE^+ = \{A, B, D, E, C\}$	$CD^+ = \{C, D\}$	$ABDE^+ = \{A, B, D, E, C\}$
$CE^+ = \{C, E\}$	$ACDE^+ = \{A, C, D, E, B\}$	$CE^+ = \{C, E\}$	$ACDE^+ = \{A, C, D, E, B\}$
$DE^+ = \{D, E\}$	$BCDE^+ = \{B, C, D, E, A\}$	$DE^+ = \{D, E\}$	$BCDE^+ = \{B, C, D, E, A\}$
$ABCDE^+ = \{A, B, C, D, E\}$		$ABCDE^+ = \{A, B, C, D, E\}$	

On remarque que, toutes les fermetures sont identiques par rapport à F ou à G , donc F et G sont équivalentes, c'est-à-dire que $\text{sat}(F) = \text{sat}(G)$.

$F = \{A \rightarrow B, AC \rightarrow D, AB \rightarrow CE\}$		$H = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, A \rightarrow E\}$	
$A^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$A^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$ABC^+ = \{A, B, C, D, E\}$
$B^+ = \{B\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C, E\}$	$B^+ = \{B, C, D\}$	$ABD^+ = \{A, B, D, C, E\}$
$C^+ = \{C\}$	$ABE^+ = \{A, B, E, C, D\}$	$C^+ = \{C, D\}$	$ABE^+ = \{A, B, E, C, D\}$
$D^+ = \{D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B, E\}$	$D^+ = \{D\}$	$ACD^+ = \{A, C, D, B, E\}$
$E^+ = \{E\}$	$ACE^+ = \{A, C, E, B, D\}$	$E^+ = \{E\}$	$ACE^+ = \{A, C, E, B, D\}$
$AB^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$ADE^+ = \{A, D, E, B, C\}$	$AB^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$ADE^+ = \{A, D, E, B, C\}$
$AC^+ = \{A, C, B, D, E\}$	$BCD^+ = \{B, C, D\}$	$AC^+ = \{A, C, B, D, E\}$	$BCD^+ = \{B, C, D\}$
$AD^+ = \{A, D, B, C, E\}$	$BCE^+ = \{B, C, E\}$	$AD^+ = \{A, D, B, C, E\}$	$BCE^+ = \{B, C, E, D\}$
$AE^+ = \{A, E, B, C, D\}$	$BDE^+ = \{B, D, E\}$	$AE^+ = \{A, E, B, C, D\}$	$BDE^+ = \{B, D, E, C\}$
$BC^+ = \{B, C\}$	$CDE^+ = \{C, D, E\}$	$BC^+ = \{B, C, D\}$	$CDE^+ = \{C, D, E\}$
$BD^+ = \{B, D\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D, E\}$	$BD^+ = \{B, D, C\}$	$ABCD^+ = \{A, B, C, D, E\}$
$BE^+ = \{B, E\}$	$ABCE^+ = \{A, B, C, E, D\}$	$BE^+ = \{B, E, C, D\}$	$ABCE^+ = \{A, B, C, E, D\}$
$CD^+ = \{C, D\}$	$ABDE^+ = \{A, B, D, E, C\}$	$CD^+ = \{C, D\}$	$ABDE^+ = \{A, B, D, E, C\}$

$CE^+ = \{C, E\}$	$ACDE^+ = \{A, C, D, E, B\}$	$CE^+ = \{C, E, D\}$	$ACDE^+ = \{A, C, D, E, B\}$
$DE^+ = \{D, E\}$	$BCDE^+ = \{B, C, D, E, A\}$	$DE^+ = \{D, E\}$	$BCDE^+ = \{B, C, D, E, A\}$
$ABCDE^+ = \{A, B, C, D, E\}$		$ABCDE^+ = \{A, B, C, D, E\}$	

On remarque que pour toutes les fermetures de F sont comprises dans celles de H , donc F et G ne sont pas équivalentes, et $\text{sat}(H) \subseteq \text{sat}(F)$.

2. Prouvons que l'algorithme **Ferme** est correct, c'est-à-dire que $\text{Res} = X_F^+$:

Montrons $\text{Res} \subseteq X_F^+ = \{A \in U \mid F \models X \rightarrow A\}$. Notons Res_i la valeur de Res avant chaque modification.

- Initialement $\text{Res}_0 = X \subseteq X_F^+$.
- Si $\text{Res}_i \subseteq X_F^+$, alors $\text{Res}_{i+1} \subseteq X_F^+$. Ceci est dû au fait que, par la définition de Res_{i+1} , il est aisé de voir que si on a $F \models X \rightarrow A$ pour tout $A \in \text{Res}_i$, alors on a $F \models X \rightarrow A$ pour tout $A \in \text{Res}_{i+1}$.
- Par conséquent, à la fin de l'algorithme, on aura : $\text{Res} = \text{Res}_N \subseteq X_F^+$

Montrons $X_F^+ \subseteq \text{Res}$, c'est à dire $X_F^+ - \text{Res} = \emptyset$. Pour ce faire, nous montrons que, pour toute dépendance $X \rightarrow B$ telle que $B \notin \text{Res}$, nous avons que $B \notin X_F^+$ et donc que $F \not\models X \rightarrow B$. Pour établir que $F \not\models X \rightarrow B$, il suffit de montrer qu'il existe une relation qui satisfait toutes les dépendances de F , mais qui ne satisfait pas $X \rightarrow B$.

Cette relation r est la suivante :

Res	B
1	1
1	0

- Cette relation ne satisfait pas $X \rightarrow B$.
- Nous allons montrer qu'elle satisfait F .
En effet, si r ne satisfaisait pas F , il y aurait dans F une dépendance $V \rightarrow W$ telle que $V \subseteq \text{Res}$ et $W \not\subseteq \text{Res}$ (par définition de R). Mais dans ce cas, l'algorithme de calcul de X_F^+ ne se serait pas arrêté et aurait ajouté les attributs de W .