Université de Provence
Licence d'Informatique
Troisième année

Bases de données
TD No 5
Dépendances Fonctionnelles

Exercice 1

Soit l'univers $U = \{A, B, C, D\}$. Considérer la relation *u* sur *U*, définie par la table suivante.

A	B	C	D
a	b	c	d
a'	b	c'	d
a	b	c'	d
a'	b	c	d

Une dépendance fonctionnelle $X \to Y$ est dite **canonique** si *Y* ne contient qu'un seul attribut. Citer toutes les dépendances fonctionnelles (DFs) canoniques non-triviales que satisfait la relation *u*. Par rapport à ces DFs, *u* a-t-elle des redondances de données ?

Exercice 2

Soit $U = \{A, B, C, D\}$, et supposons que $dom(A) = \{a, a'\}$, $dom(B) = \{b, b'\}$, $dom(C) = \{c, c'\}$ et $dom(D) = \{d\}$. Pour chaque ensemble *F* suivant, calculer les relations maximales (par rapport à l'inclusion) appartenant à $sat(F)$.

(a) $F = \{AB \to CD\}$

(b) $F = \{D \to BC\}$

(c) $F = \{D \to BC, AB \to CD\}$

(d) $F = \{CD \to AB, AB \to CD\}$

Exercice 3

Prouver que :

(a) Si $F \subseteq G$ alors $sat(G) \subseteq sat(F)$.

(b) Si $F \models G$ alors $sat(F) \subseteq sat(G)$.

(c) $sat(F \cup G) = sat(F) \cap sat(G)$

Est-ce que $sat(F \cap G) = sat(F) \cup sat(G)$?

Exercice 4 : Preuve des propriétés de l'implication sémantique.

Sur un univers *U*, considérer un ensemble *F* quelconque de dépendances fonctionnelles (DFs), et les schémas de relations *X*, *Y*, *Z*, *W* définis sur *U*. Prouver les propriétés suivantes :

(a) $F \models X \to \varnothing$.

(b) $\{X \to Y\} \models \{XZ \to YZ\}$ (augmentation).

(c) $\{X \to Y, Y \to Z\} \models \{X \to Z\}$ (transitivité).

(d) $\{X \to Y, X \to Z\} \models \{X \to YZ\}$ (addition).

(e) $\{X \to YZ\} \models \{X \to Y, X \to Z\}$ (décomposition).

(f) $\{X \to Y, YZ \to W\} \models \{XZ \to W\}$ (pseudo-transitivité).

Exercice 5 :

Soit $F = \{C \to A, D \to B, AB \to CD\}$ et $G = \{CD \to B, AB \to C, AB \to D\}$. Est-ce que $sat(F) = sat(G)$?

Exercice 6 :

Soit : $F = \{A \to B, AC \to D, AB \to CE\}$, $G = \{A \to B, A \to D, AB \to CE\}$, $H = \{A \to B, B \to C, C \to D, A \to E\}$. Quelle est la relation ensembliste entre $sat(F)$ et $sat(G)$? Entre $sat(F)$ et $sat(H)$?

Exercice 7 :

Montrer que la fermeture d'un ensemble de DFs *F* peut être de taille exponentielle par rapport à la taille de *F*.

Exercice 8 :

Soit $U = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $G = \{A \to B, A \to AC, CB \to AE, BD \to AC\}$. Calculer les fermetures de *A*, *AC*, *AD*, *BF* et *BDF* par rapport à *G*.

Exercice 9 :

Le système d'Armstrong est un système de dérivation syntaxique avec un axiome et deux règles de dérivations :

- Axiome : $\vdash X \to Y, \forall Y \subseteq X$
- Règle d'augmentation : $\{X \to Y\} \vdash XZ \to YZ$
- Règle de transitivité : $\{X \to Y, Y \to Z\} \vdash X \to Z$

Prouver que la dérivation d'après le système d'Armstrong est correcte et complète, vis-à-vis de déductions sémantiques, c'est-à-dire : $F \vdash X \to Y \Leftrightarrow F \models X \to Y$.

Exercice 10 : Algorithme *Ferme*.

<u>Entrée :</u> L'univers *U*, un schéma $X \subseteq U$, et un ensemble *F* de DFs.

<u>Sortie :</u> La fermeture X_F^+.

```
Res := X;
répéter
    Unchange := true;
    pour chaque DF Y → Z ∈ F faire
        si (Y ⊆ Res and Z ⊄ Res) alors
            début
                Res := Res ∪ Z;
                Unchange := false;
            fin
jusqu'à ce que (Res = U ou Unchange);
retourne Res.
```

1. Appliquer cet algorithme pour résoudre les exercices 5 et 6.
2. Prouver que l'algorithme ***Ferme*** est correct, c'est-à-dire que $Res = X_F^+$.