Université de Provence
Licence d'Informatique
Troisième année

Bases de données
TD No 2
Algèbre et Calcul Relationnel

Exercice 1

Enoncé :

Sur les schémas $R = AB$ et $S = BC$ tels que $dom(A) = dom(C)$, considérer deux relations *r* et *s* définies par les tables suivantes.

A	*B*
a	b
c	b
d	e

B	*C*
b	c
e	a
b	d

Calculez :

(a) $r \bigcup s$
(b) $r \setminus s$
(c) $r \bigcap s$
(d) $\Pi_A(r)$
(e) $r \bowtie s$
(f) $r \bowtie_{A<C} s$ (où < est l'ordre alphabétique)
(g) $\Pi_B(r \bowtie s)$
(h) $\sigma_{A=C}(r \bowtie s)$
(i) $r \times s$: sous-entendu qu'on peut renommer *B* en *D* pour la relation *s*

Correction :

Les tables correspondant à chacune des expressions précédentes sont les suivantes :

(a) Relation $r \bigcup s$

Définition :
L'union est une opération binaire, de type ensembliste, entre deux relations *r* et *s* de même schéma *R*. L'union retourne une relation de même schéma *R*, contenant l'ensemble des tuples qui appartiennent au moins à une des deux relations *r* et *s*.

Question :

On remarque que *r* et *s* ont des schémas *R* et *S* identiques puisque $dom(C) = dom(A)$. Dans le cas contraire, afin de pouvoir calculer l'union, il nous aurait fallu renommer *C* en *A* dans le schéma *S* afin que les deux schémas *R* et *S* soient identiques et la formulation exacte pour appliquer l'union serait la suivante :

$$r \bigcup \rho_{C=A}(s).$$

Solution :

A	*B*
a	b
c	b
d	e
a	e
d	b

(b) Relation $r \setminus s$

Définition :
La différence est une opération binaire, de type ensembliste, entre deux relations *r* et *s* de même schéma *R*. La différence retourne une relation de même schéma *R*, contenant l'ensemble des tuples qui appartiennent à *r* mais pas à *s*.

Question :

On remarque que *r* et *s* ont des schémas *R* et *S* identiques puisque $dom(C) = dom(A)$. Dans le cas contraire, afin de pouvoir calculer la différence, il nous aurait fallu renommer *C* en *A* dans le schéma *S* afin que les deux schémas *R* et *S* soient identiques et la formulation exacte pour appliquer la différence serait la suivante :

$$r \setminus \rho_{C=A}(s).$$

Solution :

A	*B*
a	b
d	e

(c) Relation $r \cap s$

Définition :
L'intersection est une opération binaire, de type ensembliste, entre deux relations *r* et *s* de même schéma *R*. L'intersection retourne une relation de même schéma *R*, contenant l'ensemble des tuples qui appartiennent à la fois à *r* et à *s*.

Question :

On remarque que *r* et *s* ont des schémas *R* et *S* identiques puisque $dom(C) = dom(A)$. Dans le cas contraire, afin de pouvoir calculer l'intersection, il nous aurait fallu renommer *C* en *A* dans le schéma *S* afin que les deux schémas *R* et *S* soient identiques et la formulation exacte pour appliquer l'intersection serait la suivante :

$$r \cap \rho_{C=A}(s).$$

Solution :

A	*B*
c	b

(d) Relation $\Pi_A(r)$

Définition :
La projection sur A (A est une liste d'attributs de la relation étudiée) est une opération unaire, de type spécifique, sur une relation *r*. La projection retourne une relation dont le schéma est celui de la relation initiale en ne gardant que les attributs mentionnés.

Solution :

A
a
c
d

(e) Relation $r \bowtie s$

Définition :
La jointure est une opération binaire, de type spécifique, entre deux relations *r* et *s*. La jointure retourne une relation dont le schéma est l'union des schémas *R* et *S*, contenant un sous-ensemble des tuples du produit cartésien qui vérifient un prédicat.

Solution :

A	*B*	*C*
a	b	c
a	b	d
c	b	c
c	b	d
d	e	a

(f) Relation $r \bowtie_{A<C} s$

Définition :

Si on ajoute un prédicat à la jointure, alors l'ensemble des tuples résultant est un sous-ensemble des tuples de la jointure qui vérifient est ce prédicat.

Solution :

A	*B*	*C*
a	b	c
a	b	d
c	b	d

(g) Relation $\Pi_B(r \bowtie s)$

Solution :

B
b
e

(h) Relation $\sigma_{A=C}\ (r \bowtie s)$

Définition :
La sélection est une opération unaire, de type spécifique, sur une relation *r*. La sélection retourne une relation dont le schéma est celui de la relation initiale en ne gardant que les tuples qui vérifient un prédicat (condition sur les attributs de la relation) spécifié en argument (restriction).

Solution :

A	*B*	*C*
c	b	c

(i) Relation $r \times s$

Définition :
Le produit cartésien est une opération binaire, de type ensembliste, entre deux relations *r* et *s* n'ayant pas d'attribut de même nom (l'intersection entre les deux schémas R et S doit être vide). Le produit cartésien retourne une relation ayant pour schéma la concaténation des deux schémas et contenant toutes les concaténations possibles des tuples des deux relations *r* et *s*.

Question :
On remarque que *r* et *s* ont des attributs en commun. Afin de pouvoir calculer le produit cartésien, il nous faut renommer *B* en *D* dans le schéma *S* afin que les deux schémas *R* et *S* aient une intersection vide. Dans ce cas, la formulation exacte pour appliquer l'union est la suivante :

$$r \times \rho_{B=D}(s).$$

Solution :

A	*B*	*D*	*C*
a	b	b	c
a	b	e	a
a	b	b	d
c	b	b	c
c	b	e	a
c	b	b	d
d	e	b	c
d	e	e	a
d	e	b	d

Exercice 2

<u>Enoncé :</u>

(a) Soient R un schéma de relation et r une relation définie sur R. Prouver que pour tout X et Y tels que $Y \subseteq X \subseteq R$:

$$\Pi_Y\left(\Pi_X\left(r\right)\right)=\Pi_Y\left(r\right) \text{ et } \sigma_{Y=y}\left(\Pi_X\left(r\right)\right)=\Pi_X\left(\sigma_{Y=y}\left(r\right)\right)$$

Dans le cas où la condition $Y \subseteq X \subseteq R$ n'est pas satisfaite, les égalités ci-dessus sont-elles encore valides ? Sinon, donner des justifications par contre-exemples.

(b) Soient r et s deux relations sur le même schéma R. Soit $X \subseteq R$. Prouver que :

(i) $\Pi_X\left(r \cup s\right)=\Pi_X\left(r\right) \cup \Pi_X\left(s\right)$

(ii) $\Pi_X\left(r \cap s\right) \subseteq \Pi_X\left(r\right) \cap \Pi_X\left(s\right)$

(iii) $\Pi_X\left(r\right)-\Pi_X\left(s\right) \subseteq \Pi_X\left(r-s\right)$

Quelles sont les relations ensemblistes entre $\Pi_X\left(r\right)-\left[\Pi_X\left(r\right)\cap\Pi_X\left(s\right)\right]$, $\Pi_X\left(r\right)-\left[\Pi_X\left(r\cap s\right)\right]$ et $\Pi_X\left(r-s\right)$.

<u>Correction :</u>

Avant de commencer, donnons la définition ensembliste des opérations utiles à cet exercice. Les ensembles obtenus contiennent une liste de n-uplets définis sur les schémas des relations sur lesquelles s'appliquent les opérations.

$$\Pi_X\left(r\right)=\left\{t\left[X\right] \mid t \in r\right\}$$

$$\sigma_{Y(A_1,\dots,A_n)=y(a_1,\dots,a_n)}\left(r\right)=\left\{t \in r \mid t\left[Y\right]=y \text{ et } Y \subseteq R\right\}=\left\{t \in r \mid \left(\forall A_i \in Y, A_i=a_i\right) \text{ et } Y \subseteq R\right\}$$

Par la suite, on préfère utiliser une version simplifiée de la sélection à un seul élément pour Y=A et y=a.

(a) Soient R un schéma de relation et r une relation définie sur R. On pose tout d'abord deux schémas X et Y tels que la condition $Y \subseteq X \subseteq R$ soit vérifiée.

<u>Montrons la relation suivante :</u> $\Pi_Y\left(\Pi_X\left(r\right)\right)=\Pi_Y\left(r\right)$.

$$\begin{aligned}
\Pi_Y\left(\Pi_X\left(r\right)\right) &= \left\{t\left[Y\right] \mid t \in \Pi_X\left(r\right)\right\}\\
&= \left\{t\left[Y\right] \mid t = t'\left[X\right] \text{ et } t' \in r\right\}\\
&= \left\{t'\left[X\right]\left[Y\right] \mid \ t' \in r\right\}\\
&= \left\{t'\left[Y\right] \mid \ t' \in r\right\} \text{ car } Y \subseteq X\\
&= \Pi_Y\left(r\right)
\end{aligned}$$

<u>Montrons le relation suivante :</u> $\sigma_{Y=y}\left(\Pi_X\left(r\right)\right)=\Pi_X\left(\sigma_{Y=y}\left(r\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y=y}\left(\Pi_X\left(r\right)\right) &= \left\{t \in \Pi_X\left(r\right) \mid t\left[Y\right]=y \text{ et } Y \subseteq R\right\}\\
&= \left\{t\left[X\right] \mid t \in r \text{ et } \left(t\left[Y\right]=y \text{ et } Y \subseteq R\right)\right\}\\
&= \left\{t\left[X\right] \mid t \in r \text{ et } t\left[Y\right]=y \text{ et } Y \subseteq R\right\}\\
&= \left\{t\left[X\right] \mid t \in \sigma_{Y=y}\left(r\right)\right\}\\
&= \Pi_X\left(\sigma_{Y=y}\left(r\right)\right)
\end{aligned}$$

<u>Que se passe t-il lorsque la condition $Y \subseteq X \subseteq R$ n'est plus satisfaite ?</u>

On pose tout d'abord : $R=ABCD$, $X=ABC$ et $Y=ABD$. Ainsi la condition $Y \subseteq X$ n'est plus respectée. Prenons un exemple et vérifier si les deux égalités sont vérifiées (on a choisit $y = (a,b,d)$)

r

A	B	C	D
a	b	c	d

donne $\Pi_X(r)$

A	B	D
a	b	d

$\neq$ $\Pi_Y(\Pi_X(r))$

A	B
a	b

r

A	B	C	D
a	b	c	d
a	b	e	f

donne $\sigma_{Y=y}(\Pi_X(r))$

A	B	C
a	b	c
a	b	e

$\neq$ $\Pi_X(\sigma_{Y=y}(r))$

A	B	C
a	b	c

(b) Soient r et s deux relations sur le même schéma R. On a ainsi la condition $X \subseteq R$.

(i) <u>Montrons la relation suivante :</u> $\Pi_X(r \cup s) = \Pi_X(r) \cup \Pi_X(s)$

$$\begin{aligned}\Pi_X(r \cup s) &= \{t[X] \mid t \in r \cup s\} \\ &= \{t[X] \mid t \in r \text{ ou } t \in s\} \\ &= \{t[X] \mid t \in r\} \cup \{t[X] \mid t \in s\} \\ &= \Pi_X(r) \cup \Pi_X(s)\end{aligned}$$

(ii) <u>Montrons la relation suivante :</u> $\Pi_X(r \cap s) \subseteq \Pi_X(r) \cap \Pi_X(s)$

$$\Pi_X(r \cap s) = \{t[X] \mid t \in r \cap s\}$$

$$\Pi_X(r) \cap \Pi_X(s) = \{t[X] \mid t[X] \in \Pi_X(r) \text{ et } t[X] \in \Pi_X(s)\}$$

Démontrons l'inclusion vers la droite :

Soit $t[X] \in \Pi_X(r \cap s)$ tel que $t \in r \cap s$.

Alors, on a : $t \in r \cap s \Rightarrow \begin{cases} t \in r \\ t \in s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t[X] \in \Pi_X(r) \\ t[X] \in \Pi_X(s) \end{cases} \Rightarrow t[X] \in \Pi_X(r) \cap \Pi_X(s)$

Donc : $\Pi_X(r \cap s) \subseteq \Pi_X(r) \cap \Pi_X(s)$.

Maintenant, prenons un contre-exemple qui permet d'éliminer complètement la possibilité d'une inclusion vers la gauche :

r

A	B	C
a	b	c
d	e	f

et s

A	B	C
a	b	c
d	e	a

et $\Pi_X(r \cap s)$

A	B
a	b

$\subset$ $\Pi_X(r) \cap \Pi_X(s)$

A	B
a	b
d	e

(iii) <u>Montrons la relation suivante :</u> $\Pi_X(r) - \Pi_X(s) \subseteq \Pi_X(r - s)$

$$\Pi_X(r - s) = \{t[X] \mid t \in r - s\} = \{t[X] \mid t \in r \text{ et } t \notin s\}$$

$$\Pi_X(r) - \Pi_X(s) = \{t[X] \mid t[X] \in \Pi_X(r) \text{ et } t[X] \notin \Pi_X(s)\}$$

Démontrons l'inclusion vers la droite :

$$t[X] \in \Pi_X(r) - \Pi_X(s) \Rightarrow \begin{cases} t[X] \in \Pi_X(r) \\ t[X] \notin \Pi_X(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \in r \\ t \notin s \end{cases} \Rightarrow t \in r - s \Rightarrow t[X] \in \Pi_X(r - s)$$

Donc : $\Pi_X(r) - \Pi_X(s) \subseteq \Pi_X(r - s)$

Maintenant, prenons un contre-exemple qui permet d'éliminer complètement la possibilité d'une inclusion vers la gauche :

r

A	B	C
a	b	c
d	e	f

et s

A	B	C
a	b	c
d	e	a

et $\Pi_X(r - s)$

A	B
d	e

$\supset$ $\Pi_X(r) - \Pi_X(s)$

A	B

Relation ensembliste entre $\Pi_X(r)-[\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)]$, $\Pi_X(r)-[\Pi_X(r\cap s)]$ et $\Pi_X(r-s)$.

$$\Pi_X(r)-[\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)]=\{t[X]\mid t[X]\in\Pi_X(r) \text{ et } t[X]\notin\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)\}$$

$$\Pi_X(r)-[\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)]\subseteq\{t[X]\mid t[X]\in\Pi_X(r) \text{ et } t[X]\notin\Pi_X(r\cap s)\} \rightarrow \text{(ii)}$$

$$\Pi_X(r)-[\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)]\subseteq\Pi_X(r)-[\Pi_X(r\cap s)]$$

Et :

$$\Pi_X(r)-\Pi_X(r\cap s)\subseteq\Pi_X(r-r\cap s) \rightarrow \text{(iii)}$$

$$\Pi_X(r)-\Pi_X(r\cap s)\subseteq\Pi_X(r-s) \rightarrow r-r\cap s=r-s$$

Donc : $\Pi_X(r)-[\Pi_X(r)\cap\Pi_X(s)] \quad\subseteq\quad \Pi_X(r)-\Pi_X(r\cap s) \quad\subseteq\quad \Pi_X(r-s)$

Exercice 3

Enoncé :

Prouver que :

(a) Si $R=S$ alors $r \bowtie s = r\cap s$.

(b) $(r \bowtie s) \bowtie z = r \bowtie (s \bowtie z)$.

(c) Soit q une relation définie sur un schéma Q. Soient R et S tels que $R, S \subseteq Q$. Alors $\Pi_{RS}(q)\subseteq\Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q)$. Est-ce que l'égalité est valide ?

(d) $(q\cup r) \bowtie s = (q \bowtie s)\cup(r \bowtie s)$ et $(q\cap r) \bowtie s = (q \bowtie s)\cap(r \bowtie s)$.

(e) Soient p et q deux relations sur les schémas P et Q respectivement. Soit $X \subseteq P\cap Q$. Quelle est la relation ensembliste entre :

(iv) $\sigma_{X=x}(p-q)$ et $\sigma_{X=x}(p)-\sigma_{X=x}(q)$?

(v) $\sigma_{X=x}(p \bowtie q)$ et $\sigma_{X=x}(p) \bowtie \sigma_{X=x}(q)$?

(vi) $\Pi_X(p \bowtie q)$ et $\Pi_X(p) \bowtie \Pi_X(q)$?

Correction :

(a) Si $R=S$ alors $r \bowtie s = r\cap s$.

$$r \bowtie s=\{t[R\cup S]\mid t[R]\in r \text{ et } t[S]\in s \text{ et } R\cap S\neq\varnothing\}$$

Donc, si $R=S$, alors $r \bowtie s=\{t[R]\mid t[R]\in r \text{ et } t[R]\in s \text{ et } R\cap R\neq\varnothing\}$

$$=\{t'\mid t'\in r \text{ et } t'\in s\} \rightarrow t'=t[X]$$

$$=r\cap s$$

(b) $(r \bowtie s) \bowtie z = r \bowtie (s \bowtie z)$.

$$(r \bowtie s) \bowtie z=\{t[RSZ]\mid (t[R]\in r \text{ et } t[S]\in s \text{ et } R\cap S\neq\varnothing) \text{ et } t[Z]\in z \text{ et } RS\cap Z\neq\varnothing\}$$

$$r \bowtie (s \bowtie z)=\{t[RSZ]\mid (t[Z]\in z \text{ et } t[S]\in s \text{ et } Z\cap S\neq\varnothing) \text{ et } t[R]\in r \text{ et } ZS\cap R\neq\varnothing\}$$

Les deux expressions sont équivalentes seulement si les conditions $R\cap S\neq\varnothing$ et $RS\cap Z\neq\varnothing$ et $Z\cap S\neq\varnothing$ et $ZS\cap R\neq\varnothing$ sont équivalentes, i.e. qu'elles sont vraies ou fausses en même temps. Pour cela, on va écrire les équivalences et trouver la condition à respecter pour que les deux expressions plus haut soient égales.

On a : $\{R\cap S\neq\varnothing \text{ et } RS\cap Z\neq\varnothing\}\equiv\{Z\cap S\neq\varnothing \text{ et } ZS\cap R\neq\varnothing\}$

si : $\{R\cap S\neq\varnothing \text{ et } (R\cap Z\neq\varnothing \text{ ou } S\cap Z\neq\varnothing)\}\equiv\{Z\cap S\neq\varnothing \text{ et } (Z\cap R\neq\varnothing \text{ ou } S\cap Z\neq\varnothing)\}$

si : $\{(R \cap S \neq \varnothing \text{ et } R \cap Z \neq \varnothing) \text{ ou } (R \cap S \neq \varnothing \text{ et } S \cap Z \neq \varnothing)\} \equiv$

$\{(Z \cap S \neq \varnothing \text{ et } Z \cap R \neq \varnothing) \text{ ou } (Z \cap S \neq \varnothing \text{ et } S \cap R \neq \varnothing)\}$

si : $\{R \cap S \neq \varnothing \text{ et } R \cap Z \neq \varnothing\} \equiv \{Z \cap S \neq \varnothing \text{ et } Z \cap R \neq \varnothing\}$ car le reste est équivalent

si : $\{R \cap S \neq \varnothing\} \equiv \{Z \cap S \neq \varnothing\}$ car le reste est équivalent

Par conséquent, pour que $(r \bowtie s) \bowtie z = r \bowtie (s \bowtie z)$, il est nécessaire d'avoir les conditions suivantes :

$(R \cap S \neq \varnothing \text{ et } Z \cap S \neq \varnothing) \text{ ou } (R \cap S = \varnothing \text{ et } Z \cap S = \varnothing)$

(c) Soit q une relation définie sur un schéma Q. Soient R et S tels que $R, S \subseteq Q$. Alors $\Pi_{RS}(q) \subseteq \Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q)$. Est-ce que l'égalité est valide ?

$$\Pi_{RS}(q) = \{t[RS] \mid t \in q\}$$

$$\Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q) = \{t[RS] \mid t[R] \in \Pi_R(q) \text{ et } t[S] \in \Pi_S(q) \text{ et } R \cap S \neq \varnothing\}$$

Ainsi, pour montrer l'inclusion, il faut rajouter une condition supplémentaire : $R \cap S \neq \varnothing$

$t[RS] \in \Pi_{RS}(q)$ tel que $t \in q \Rightarrow t[R] \in \Pi_R(q)$ et $t[S] \in \Pi_S(q) \Rightarrow t[RS] \in \Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q)$

Donc $\Pi_{RS}(q) \subseteq \Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q)$.

Maintenant, prenons un contre-exemple qui permet de montrer que l'égalité n'est pas valide ($R = AB$, $S = BC$):

q

A	B	C
a	b	c
d	b	f

et $\Pi_{RS}(q)$

A	B	C
a	b	c
d	b	f

$\subset$ $\Pi_R(q) \bowtie \Pi_S(q)$

A	B	C
a	b	c
a	b	f
d	b	c
d	b	f

(d) $(q \cup r) \bowtie s = (q \bowtie s) \cup (r \bowtie s)$ et $(q \cap r) \bowtie s = (q \bowtie s) \cap (r \bowtie s)$: pour que ces deux égalités soient vérifiées, il faut que $Q = R$.

$$t[RS] \in (q \cup r) \bowtie s \Leftrightarrow t[R] \in (q \cup r) \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow (t[R] \in q \text{ ou } t[R] \in r) \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow (t[R] \in q \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing) \text{ ou } (t[R] \in r \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing)$$
$$\Leftrightarrow t[RS] \in (q \bowtie s) \text{ ou } t[RS] \in (r \bowtie s)$$
$$\Leftrightarrow t[RS] \in (q \bowtie s) \cup (r \bowtie s)$$

$$t[RS] \in (q \cap r) \bowtie s \Leftrightarrow t[R] \in (q \cap r) \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow (t[R] \in q \text{ et } t[R] \in r) \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow (t[R] \in q \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing) \text{ et } (t[R] \in r \text{ et } t[S] \in s \text{ et } R \cap S \neq \varnothing)$$
$$\Leftrightarrow t[RS] \in (q \bowtie s) \text{ et } t[RS] \in (r \bowtie s)$$
$$\Leftrightarrow t[RS] \in (q \bowtie s) \cap (r \bowtie s)$$

(e) Soient p et q deux relations sur P et Q respectivement. Soit $X \subseteq P \cap Q$.

(i) $\sigma_{X=x}(p - q)$ et $\sigma_{X=x}(p) - \sigma_{X=x}(q)$?

$$\sigma_{X=x}(p-q) = \{t \in (p-q) \mid X = x\}$$
$$= \{t \in p \text{ et } t \notin q \mid X = x\}$$
$$= \{t \in p \mid X = x\} - \{t \in q \mid X = x\}$$
$$= \sigma_{X=x}(p) - \sigma_{X=x}(q)$$

(ii) $\sigma_{X=x}(p \bowtie q)$ et $\sigma_{X=x}(p) \bowtie \sigma_{X=x}(q)$?

$$\sigma_{X=x}(p \bowtie q) = \{t \in (p \bowtie q) \mid X = x\}$$
$$= \{t[PQ] \mid t[P] \in p \text{ et } t[Q] \in q \text{ et } X = x\}$$
$$= \{t[PQ] \mid (t[P] \in p \text{ et } X = x) \text{ et } (t[Q] \in q \text{ et } X = x)\}$$
$$= \{t[PQ] \mid (t[P] \in \sigma_{X=x}(p)) \text{ et } (t[Q] \in \sigma_{X=x}(q))\}$$
$$= \sigma_{X=x}(p) \bowtie \sigma_{X=x}(q)$$

(iii) $\Pi_X(p \bowtie q)$ et $\Pi_X(p) \bowtie \Pi_X(q)$?

$$t[X] \in \Pi_X(p \bowtie q) \text{ tel que } t[PQ] \in p \bowtie q \Leftrightarrow t[P] \in p \text{ et } t[Q] \in q \text{ et } P \cap Q \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow t[P][X] \in \Pi_X(p) \text{ et } t[Q][X] \in \Pi_X(p) \text{ et } P \cap Q \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow t[X] \in \Pi_X(p) \text{ et } t[X] \in \Pi_X(p) \text{ et } P \cap Q \neq \varnothing \qquad \text{car } X \subseteq P \cap Q \Rightarrow X \subseteq P, Q$$
$$\Leftrightarrow t[X] \in \Pi_X(p) \bowtie \Pi_X(q)$$

Exercice 4 : Requêtes algébriques

Enoncé :

Considérer le schéma de base suivant :

Salle *(nom_salle, horaire, titre, prix_de_place)*
Produire *(producteur, titre)*
Film *(titre, realisateur, acteur)*

Formuler les requêtes suivantes en langage relationnel associé à ce schéma de base :

(a) Où et à quelle heure peut-on voir le film « Le grand bleu » ?
(b) Quels sont les films réalisés par G. Jugnot ?
(c) Quels sont les films dont le réalisateur est aussi un acteur ?
(d) Où peut-on voir un film dont E. Béart est une actrice ?
(e) Quels sont les acteurs qui jouent dans au moins un film produit par Gaumont ?
(f) Quels sont les acteurs qui jouent dans tous les films réalisés par G. Jugnot ?
(g) Quel producteur produit tous les films du réalisateur G. Jugnot ?
(h) Quels acteurs et réalisateurs participent à tous les films produits par Gaumont ?
(i) Quels films ne passent dans aucune salle ?
(j) Quel producteur produit un film qui ne passe dans aucune salle ?
(k) Quel producteur ne produit aucun film du réalisateur A. Cavalier ?
(l) Quels acteurs ont produit des films dans lesquels ils jouent ?

Correction :

(a) $\Pi_{horaire, nom\_salle}\left(\sigma_{titre=\text{"Le grand bleu"}}(Salle)\right)$

(b) $\Pi_{titre}\left(\sigma_{realisateur=\text{"G. Jugnot"}}(Film)\right)$

(c) $\Pi_{titre}\left(\sigma_{realisateur=acteur}(Film)\right)$

(d) $\Pi_{nom\_salle}\left(\sigma_{acteur=\text{"E. Beart"}}(Film \bowtie Salle)\right)$

(e) $\Pi_{acteur}\left(\sigma_{producteur="Gaumont"}\left(Film \bowtie Produire\right)\right)$

(f) $\Pi_{acteur}\left(\sigma_{réalisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right) - \Pi_{acteur}\left(\left(\Pi_{acteur}\left(Film\right) \times \Pi_{titre,realisateur}\left(\sigma_{realisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right)\right) - Film\right)$

Pour traduire cette requête, il faut tout d'abord commencer pour sélection l'ensemble des acteurs qui jouent dans les films du réalisateur « G. Jugnot ». A cette liste, il faut retirer l'ensemble des acteurs qui ne jouent pas au moins dans un film de « G. Jugnot ». Ainsi :

- $\Pi_{acteur}\left(\sigma_{réalisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right)$ permet d'avoir la liste des acteurs jouant dans les films du réalisateur « G. Jugnot »
- $\left(\Pi_{acteur}\left(Film\right) \times \Pi_{titre,realisateur}\left(\sigma_{realisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right)\right)$ permet d'avoir toutes les possibilités entre les films du réalisateur « G. Jugnot » et les différents acteurs.
- $\Pi_{acteur}\left(\left(\Pi_{acteur}\left(Film\right) \times \Pi_{titre,realisateur}\left(\sigma_{realisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right)\right) - Film\right)$ permet d'avoir la liste des acteurs qui ne jouent pas au moins dans un film du réalisateur « G. Jugnot », tout simplement en retirant de la liste précédente la liste des films effectifs avec leurs acteurs respectifs.

(g) $\Pi_{producteur}\left(\sigma_{realisateur="G. Jugnot"}\left(Film \bowtie Produire\right)\right) - \Pi_{producteur}\left(\left(\Pi_{producteur}\left(Produire\right) \times \Pi_{titre}\left(\sigma_{realisateur="G. Jugnot"}\left(Film\right)\right)\right) - Produire\right)$

(h) $\Pi_{acteur,realisateur}\left(\sigma_{producteur="Gaumont"}\left(Film \bowtie Produire\right)\right)$

$-\Pi_{acteur,realisateur}\left(\left(\Pi_{acteur,realisateur}\left(Film\right) \times \Pi_{titre}\left(\sigma_{producteur="Gaumont"}\left(Produire\right)\right)\right) - Film\right)$

(i) $\Pi_{titre}\left(Film\right) - \Pi_{titre}\left(Salle\right)$

(j) $\Pi_{producteur}\left(Produire \bowtie \Pi_{titre}\left(Film\right) - \Pi_{titre}\left(Salle\right)\right)$

ou $\Pi_{producteur}\left(Produire\right) - \Pi_{producteur}\left(Produire \bowtie Salle\right)$

(k) $\Pi_{producteur}\left(Produire\right) - \Pi_{producteur}\left(Produire \bowtie \sigma_{realisateur="A. Cavalier"}\left(Film\right)\right)$

(l) $\Pi_{acteur}\left(\sigma_{producteur=acteur}\left(Produire \bowtie Film\right)\right)$

Exercice 5 : Requêtes algébriques

Enoncé :

Considérer une base de données définie sur les schémas de relations suivants :

Fournisseur *(NomFournisseur, Ville)*
Piece *(NomPiece, Couleur, Poids)*
Envoi *(NomFournisseur, NomPiece, Date)*

Formuler les requêtes suivantes en langage relationnel associé à ce schéma de base :

(a) Chercher les fournisseurs dans la ville de Paris.
(b) De quelle ville proviennent les pièces rouges ?
(c) Chercher les fournisseurs qui n'ont pas envoyé les pièces rouges.
(d) Chercher les fournisseurs qui ont envoyé au moins deux pièces différentes.
(e) Chercher les fournisseurs qui ont envoyé toutes les pièces.
(f) Chercher les fournisseurs qui n'ont envoyé que les pièces rouges.
(g) Chercher les fournisseurs qui ont envoyé au plus une pièce (zéro ou une pièce).
(h) Chercher les fournisseurs qui ont envoyé le plus grand nombre de pièces.
(i) Chercher les fournisseurs qui ont envoyé le deuxième plus grand nombre de pièces.

Correction :

(a) $\Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{Ville='Paris'}\left(Fournisseur\right)\right)$

(b) $\Pi_{Ville}\left(\sigma_{Couleur='Rouge'}\left(Piece \bowtie Envoi \bowtie Fournisseur\right)\right)$

(c) $\Pi_{NomFournisseur}\left(Fournisseur\right) - \Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{Couleur='rouge'}\left(Fournisseur \bowtie Envoi \bowtie Piece\right)\right)$

(d) $\Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{NomPiece1 \neq NomPiece2}\left(Envoi \bowtie \sigma_{NomPiece=NomPiece'}\left(Envoi\right)\right)\right)$

(e) $\Pi_{NomFournisseur}\left(Envoi\right) - \Pi_{NomFournisseur}\left(\Pi_{NomFournisseur}\left(Fourn\right) \times \Pi_{NomPiece}\left(Piece\right) - \Pi_{NomFournisseur, NomPiece}\left(Envoi\right)\right)$

(f) $\Pi_{Ville}\left(\sigma_{Couleur='Rouge'}\left(Piece \bowtie Envoi \bowtie Fournisseur\right)\right) - \Pi_{Ville}\left(\sigma_{Couleur \neq 'Rouge'}\left(Piece \bowtie Envoi \bowtie Fournisseur\right)\right)$

(g) $\left(\Pi_{NomFournisseur}\left(Fournisseur\right) \cup \Pi_{NomFournisseur}\left(Envoi\right)\right) - \Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{NomPiece1 \neq NomPiece2}\left(Envoi \bowtie \sigma_{NomPiece=NomPiece'}\left(Envoi\right)\right)\right)$

(h) $\Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{Max(Count(NomPiece))}\left(Envoi\right)\right)$

(i) $\Pi_{NomFournisseur}\left(\sigma_{Max(Count(NomPiece))}\left(Envoi - \sigma_{Max(Count(NomPiece))}\left(Envoi\right)\right)\right)$

Exercice 6 :

Qu'est ce que le calcul relationnel à variables domaines

Le calcul relationnel des domaines reposent sur le calcul des prédicats. Cette théorie mathématique étudie les formules logiques construites avec un ensemble de prédicats (c'est-à-dire de propositions qui peuvent être vraie ou fausses dans un certain contexte), les opérateurs « et », « ou », « négation », « implication logique », des variables et les opérateurs « $\exists$ » et « $\forall$ ».

A chaque formule logique correspond l'ensemble des données qui vérifient cette formule. L'interrogation de la base de données consiste donc à énoncer une formule qui correspond aux données que l'on souhaite extraire de la base.

Pour le calcul relationnel des domaines, chaque variable prend ses valeurs dans un domaine particulier des attributs de la base. Pour les prédicats, on se limite à n'utiliser que les opérateurs qui comparent des valeurs d'attributs en utilisant les opérateurs habituels (>, ≥, <, ≤, ≠). On y ajoute l'opérateur unaire qui indique qu'une variable prend ses valeurs dans un domaine (par exemple, *TABLE*(*Attr* :*x*) indique que la variable *x* prend ses valeurs dans le domaine de l'attribut *Attr* de la relation *TABLE*).

Enoncé :

Réécrire les requêtes des exercices 4 et 5 en calcul relationnel à variables domaines.

Correction : ex 4

(a) $\left\{(h,n) \mid \exists t \;\; Salle\left(horaire:h, nom\_salle:n, titre:t\right) \text{ et } \left(t='\text{Le grand bleu}'\right)\right\}$

(b) $\left\{t \mid \exists r \;\; Film\left(titre:t, realisateur:r\right) \text{ et } \left(r='\text{G. Jugnot}'\right)\right\}$

(c) $\left\{t \mid \exists r,a \;\; Film\left(titre:t, realisateur:r, acteur:a\right) \text{ et } \left(r=a\right)\right\}$

(d) $\left\{n \mid \exists a,t \;\; Film\left(acteur:a, titre:t\right) \text{ et } Salle\left(nom\_salle:n, titre:t\right) \text{ et } \left(a='\text{E.Beart}'\right)\right\}$

(e) $\left\{a \mid \exists p,t \;\; Film\left(acteur:a, titre:t\right) \text{ et } Produire\left(producteur:p, titre:t\right) \text{ et } \left(producteur='\text{Gaumont}'\right)\right\}$

(f) $\left\{a \mid \exists r \;\; \forall t \;\; Film\left(titre:t, realisateur:r, acteur:a\right) \text{ et } \left(r='\text{G. Jugnot}'\right)\right\}$

(g) $\left\{p \mid \exists r \;\; \forall t \;\; Film\left(titre:t, realisateur:r\right) \text{ et } Produire\left(titre:t, producteur:p\right) \text{ et } \left(r='\text{G. Jugnot}'\right)\right\}$

(h) $\left\{ (a,r) \mid \exists p\ \forall t \quad \begin{array}{c} Film\left(acteur: a, realisateur: r, titre: t\right) \text{ et } Produire\left(titre: t, producteur: p\right) \\ \text{et } \left(p = \text{'Gaumont'}\right) \text{ et } \left(t \neq t'\right) \end{array} \right\}$

(i) $\left\{ t \mid \forall t' \ \ Film\left(titre: t\right) \text{ et } Salle\left(titre: t'\right) \text{ et } \left(t \neq t'\right) \right\}$

(j) $\left\{ p \mid \exists t\ \forall t' \ \ Film\left(titre: t\right) \text{ et } Produire\left(titre: t, producteur: p\right) \text{ et } Salle\left(titre: t'\right) \text{ et } \left(t \neq t'\right) \right\}$

(k) $\left\{ p \mid \exists r, t'\ \forall t \ \ Film\left(titre: t, réalisateur: r\right) \text{ et } Produire\left(titre: t', producteur: p\right) \text{ et } \left(r = \text{'A. Cavalier'}\right) \text{ et } \left(t \neq t'\right) \right\}$

(l) $\left\{ a \mid \exists p, t \ \ Film\left(titre: t, acteur: a\right) \text{ et } Produire\left(titre: t, producteur: p\right) \text{ et } \left(p = a\right) \right\}$

<u>Correction : ex 5</u>

(a) $\left\{ n_f \mid \exists v \ \ Fournisseur\left(NomFournisseur: n_f, Ville: v\right) \text{ et } \left(Ville = \text{'Paris'}\right) \right\}$

(b) $\left\{ v \mid \exists n_f, n_p, c \quad \begin{array}{c} Piece\left(Couleur: c, NomPiece: n_p\right) \text{ et } Envoi\left(NomPiece: n_p, NomFournisseur: n_f\right) \\ \text{et } Fournisseur\left(NomFournisseur: n_f, Ville: v\right) \end{array} \right\}$

(c) $\left\{ n_f \mid \exists c\ \forall n_p \ \ Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p\right) \text{ et } Piece\left(NomPiece: n_p, Couleur: c\right) \text{ et } \left(c \neq \text{'rouge'}\right) \right\}$

(d) $\left\{ n_f \mid \exists n_p, n'_p \quad \begin{array}{c} Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p\right) \\ \text{et } Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n'_p\right) \end{array} \text{ et } \left(n'_p \neq n_p\right) \right\}$

(e) $\left\{ n_f \mid \forall n_p \ \ Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p\right) \right\}$

(f) $\left\{ n_f \mid \exists c\ \forall n_p \ \ Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p\right) \text{ et } Piece\left(NomPiece: n_p, Couleur: c\right) \text{ et } \left(c = \text{'rouge'}\right) \right\}$

(g) $\left\{ n_f \mid \begin{array}{c} \left(\forall n'_f \ \ Fournisseur\left(NomFournisseur: n_f\right) \text{ et } Envoi\left(NomFournisseur: n'_f\right) \text{ et } \left(n_f \neq n'_f\right)\right) \text{ ou} \\ \left(\exists d, d', n_p, n'_p \ \forall n'_f \quad \begin{array}{c} Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p, Date: d\right) \\ \text{et } Envoi\left(NomFournisseur: n'_f, NomPiece: n'_p, Date: d'\right) \end{array} \text{ et } \begin{array}{c} \left(n_f \neq n'_f\right) \text{ et} \\ \left(n_p \neq n'_p\right) \text{ et} \\ \left(d \neq d'\right) \end{array} \right) \end{array} \right\}$

(h) $\left\{ n_f \mid \forall n'_f \begin{pmatrix} \text{card}\left(\left\{\left(n_p, d\right) \mid Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p, Date: d\right)\right\}\right) \\ \geq \text{card}\left(\left\{\left(n_p, d\right) \mid Envoi\left(NomFournisseur: n'_f, NomPiece: n_p, Date: d\right)\right\}\right) \end{pmatrix} \text{ et } \left(n_f \neq n'_f\right) \right\}$

(i) $\left\{ n_f \mid \exists n''_f \forall n'_f \begin{pmatrix} \text{card}\left(\left\{\left(n_p, d\right) \mid Envoi\left(NomFournisseur: n''_f, NomPiece: n_p, Date: d\right)\right\}\right) \\ \geq \text{card}\left(\left\{\left(n_p, d\right) \mid Envoi\left(NomFournisseur: n_f, NomPiece: n_p, Date: d\right)\right\}\right) \\ \geq \text{card}\left(\left\{\left(n_p, d\right) \mid Envoi\left(NomFournisseur: n'_f, NomPiece: n_p, Date: d\right)\right\}\right) \end{pmatrix} \text{ et} \left\{ \begin{array}{c} \left(n_f \neq n'_f\right) \\ \left(n_f \neq n''_f\right) \end{array} \right. \right\}$